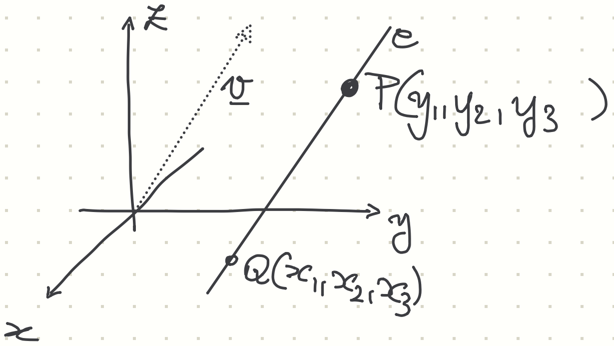
3. ÓRA – Egyenesek és síkok $\mathbb{R}^3$-ban.

Egyenesek



Egyenesek megadása: Adott $P(y_1,y_2,y_3)$ és $\underline{v}$ irányvektor. (v_1,v_2,v_3)

$(x_1,x_2,x_3)\in e \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}\quad \vec{OP}-\vec{OQ}=t\cdot\underline{v}$

$$\underbrace{\begin{array}{l} x_1-y_1=tv_1\\ x_2-y_2=t\cdot v_2\\ x_3-y_3=t\cdot v_3\end{array}}_{\text{paraméteres egyenletrsz.}} \Leftrightarrow t=\frac{x_1-y_1}{v_1}=\frac{x_2-y_2}{v_2}=\frac{x_3-y_3}{v_3}$$

Feladatok

e egyenes: $x_1=1+t$, $x_2=4-2t$, $x_3=5t$

f: $x_1=8+t$, $x_2=8+t$, $x_3=5$

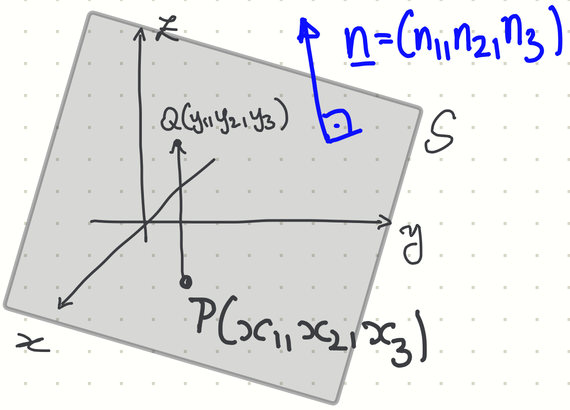
g: $x_1=0$, $x_2=3$, $x_3=0+t$

0. Bemelegítő:
   a) mi az e egyenes irányvektora? $(1,-2,5)$
   b) mi egy pont az f-en? $(8,8,5)$

1. Egyenesek megadása
   a) Adjuk meg a $P(1,2,3)$ és $Q(0,4,7)$ ponton átmenő egyenes paraméteres egyenletrendszerét.
   b) Adjuk meg a $P(a,b,c)$ ponton átmenő e-vel párhuzamos egyenes param. egyenletrendszerét.
   c) A.m. az e-re merőleges egyenest a $P(1,1,1)$ ponton át
   d) $P(1,1,1)$ és e távolsága?

2. Egyenesek és pontok helyzete a térben.
   a) Rajta van-e a $Q(2,2,5)$ pont az e egyenesen?
   b) Metsző-e az e és az f egyenes?
   c) Mi az e és f egyenesek által bezárt szög?
   d) Mi az e egyenes távolsága a $Q(-2,0,0)$ ponttól?
   e) Mi az e és g egyenesek távolsága? (kf. 2 párh. egyenes távolsága)

Síkok



Adott $P(x_1,x_2,x_3)$ pont a síkból és az $\underline{n}$ normálvektor. (n_1,n_2,n_3)

$Q(y_1,y_2,y_3)\in S \Leftrightarrow \vec{PQ}\perp \underline{n} \Leftrightarrow \vec{PQ}\cdot\underline{n}=0$

$$\boxed{(x_1-y_1)\cdot n_1+(x_2-y_2)\cdot n_2+(x_3-y_3)\cdot n_3=0}$$

A sík normálvektoros egyenlete.

$\underline{x}\cdot n=\underline{y}\cdot n$

Feladatok.

$S_1: x_1+x_2=9$, $S_2: 2x_1+x_2-17x_3=4$

0. Bemelegítő:

a) Mi az S_1 sík normálvektora? $(1,1,0)$

b) Mi egy pont az S_2 síkon? $(1,1,-1/17)$

1. Síkok megadása:

a) Adjuk meg a $v_1=(1,2,0)$ $v_2=(3,0,5)$ „indegyű" $(1,1,1)$ ponton áthaladó sík egyenletét.

b) Adjuk meg a $P(-2,0,3)$, $Q(5,1,0)$, $R(2,3,1)$ pontokat tartalmazó sík egyenletét.

2. Pontok, egyenesek & Síkok

a) Rajta van-e a $P(3,4,5)$ pont az S_2 síkon?

b) Metszi-e egymást f és S_1? Mely pontban/pontokban?

c) S_1 és S_2 metszeteként előálló egyenes egyenlete?

d) S_1 és S_2 hajlásszöge?

e) S_1-re merőleges $P(a,b,c)$ ponton átmenő egyenes? + S_1 és $P(a,b,c)$ távolsága?

f) e és S_1 által bezárt szög?

g) Adjuk meg az e és h egyeneseken átmenő sík param. egyenletrendszerét, ahol

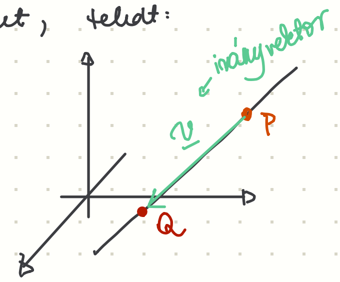
$$h: \begin{cases} x_1 = 1-2t \\ x_2 = 4t \\ x_3 = 2-10t \end{cases}$$

Megoldás:

① a) $\overrightarrow{PQ} = (-1,2,4)$ az irányvektor

$P(1,2,3)$ a pont, tehát:

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 1 - t \\ x_2 &= 2 + 2t \\ x_3 &= 3 + 4t \end{aligned}}$$



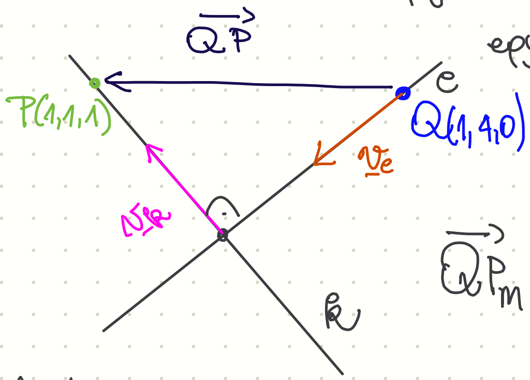
b) párhuzamos $\Longleftrightarrow$ megegyezik az irányvektoruk

$v = (1,-2,5)$

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= a + t \\ x_2 &= b - 2t \\ x_3 &= c + 5t \end{aligned}}$$

c) L! a keresett egyenes k, v_k irányvektorral

egy pontja $P(1,1,1)$, mi v_k?



A/ ha v_e e irányvektora, $Q \in e$

$\overrightarrow{QP}$ v_e-re mer. komponense.

$$\overrightarrow{QP_m} = \frac{(v \times \overrightarrow{QP}) \times v}{|v|^2}$$

$v = (1,-2,5)$

$\overrightarrow{QP} = (0,3,-1)$

A/ $(v \times \overrightarrow{QP}) \times v = (11, 68, 25)$ ← ez már jó irányvektor

a keresett egyenlet: $\boxed{\begin{aligned} x_1 &= 1 + 11t \\ x_2 &= 1 + 68t \\ x_3 &= 1 + 25t \end{aligned}}$

d) távolság:

$$d(e,P) = \frac{\sqrt{11^2 + 68^2 + 25^2}}{1+4+25} \approx 2.44$$

Megj: Számolható skaláris szorzással a párhuzamos komponens és kivonással megkapjuk a merőlegest.

d) $d(e,P) = |\overrightarrow{QP_m}| = \boxed{\frac{\sqrt{11^2+68^2+25^2}}{1+4+25} \approx 2.44}$

② a) Rajta van, ha $(2,2,5)$ kielégíti az egyenletrendszert

$v = (1,-2,5)$ $P(1,4,0)$ egy pont

$$\frac{2-1}{1} = \frac{2-4}{-2} = \frac{5-0}{5} \checkmark \quad \boxed{\text{rajta van.}}$$

b) Vis $\exists\, x_1, x_2, x_3$, ami mindkét egyenletet kielégíti,

vis $\exists\, t_1$ & t_2, hogy

$$\begin{aligned} 1 + t_1 &= 8 + t_2 \\ 4 - 2t_1 &= 8 + t_2 \\ 5t_1 &= 5 \end{aligned} \Rightarrow t_1 = 1, \quad 2 = 8 + t_2 \rightarrow t_2 = -6$$

$\boxed{\text{Metszéspont: } (2,2,5)}$

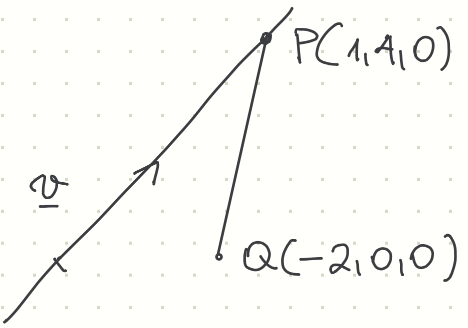
c) Az egyenesek által bezárt szög = az irányvektorok által bezárt szög.

$v_1 = (1,-2,5)$ $v_2 = (1,1,0)$ $v_1 \cdot v_2 = 1 - 2 + 0 = -1 =$

$= |v_1| \cdot |v_2| \cdot \cos(\gamma)$

$$\cos\gamma = \frac{-1}{\sqrt{2 \cdot 30}} \Rightarrow \boxed{\gamma \approx 97.42°}$$

d)



a merőleges komponens hossza.
lásd. 1/c&d

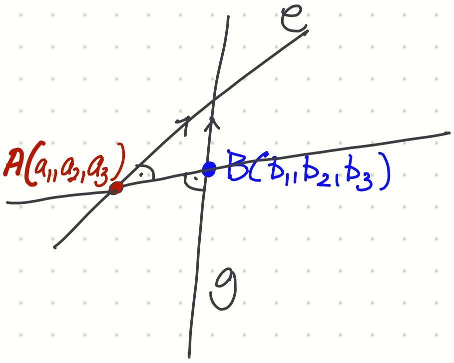
Számoljuk most sk. szorzattal, először $\vec{PQ}$ $\underline{v}$-vel párhuzamos komponensét, majd a merőlegeset.

$\vec{PQ} = (-3,-4,0)$ $\quad \underline{v} = (1,-2,5)$

$$\frac{\vec{PQ}\cdot \underline{v}}{|\underline{v}|^2}\cdot \underline{v} = \frac{-3+8}{30}\cdot(1,-2,5) = \vec{PQ}_p = \frac{5}{30}\cdot(1,-2,5) = \left(\tfrac{1}{6}, -\tfrac{2}{6}, \tfrac{5}{6}\right)$$

$$\vec{PQ}_m = \vec{PQ} - \vec{PQ}_p = \left(-3 - \tfrac{5}{\sqrt{30}}, -4 + \frac{10}{\sqrt{30}}, \frac{-25}{\sqrt{30}}\right) = \left(\tfrac{17}{6}, -\tfrac{22}{6}, -\tfrac{5}{6}\right)$$

e) Fontos megfigyelés: A 2 egyenes nem párhuzamos! Ha az más módszer kell.



- Amit keresünk az az A és B pont távolsága a rajzon. A és B azon pontok, ahol egy az e-re és g-re is merőleges, mindkettőt metsző egyenes elmetszi e-t (A) és g-t (B).
- $\vec{AB} \parallel \underline{v}_1 \times \underline{v}_2$-vel ($\underline{v}_1, \underline{v}_2$ a két irányvektor)

$\Downarrow$

$$|\vec{AB}\cdot \underline{v}_1\times\underline{v}_2| = |AB|\cdot|\underline{v}_1\times\underline{v}_2|\cdot|\cos\sphericalangle(\vec{AB}, \underline{v}_1\times\underline{v}_2)|$$

tehát, ha $\underline{n} = \underline{v}_1\times\underline{v}_2$

$$|\vec{AB}| = \frac{|\vec{AB}|\cdot|\underline{n}|}{|\underline{n}|}\cdot|\cos\gamma| = \frac{|\vec{AB}\cdot\underline{n}|}{|\underline{n}|} = *$$

Legyen $\vec{OA} = \underline{a} = (a_1,a_2,a_3)$ $\quad \vec{OB} = \underline{b} = (b_1,b_2,b_3) \Rightarrow \vec{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

$$* = \frac{|(\underline{b}-\underline{a})\cdot\underline{n}|}{|\underline{n}|} = \frac{|(t_1\underline{v}_1 + \underline{p}_1)\cdot\underline{n} - (t\cdot\underline{v}_2 + \underline{p}_2)\cdot\underline{n}|}{|\underline{n}|} = \frac{|(\underline{p}_1 - \underline{p}_2)\cdot\underline{n}|}{|\underline{n}|}$$

$\underline{a} = t_1\underline{v}_1 + \underbrace{(1,4,0)}_{p_1}$ $\quad \underline{b} = t_2\underline{v}_2 + \underbrace{(0,3,0)}_{p_2}$

$\underline{v}_1 \perp \underline{n}$, $\underline{v}_2 \perp \underline{n} \Rightarrow \underline{v}_1\cdot\underline{n} = \underline{v}_2\cdot\underline{n} = 0$

Számoljuk ki:

$\underline{n}$: $\underline{v}_1\times\underline{v}_2 = \underline{n} = (-2,-1,0)$

$|\underline{n}| = \sqrt{5}$

$\rightarrow$ $\underline{p}_1 - \underline{p}_2 = (1,1,0)$

$\underline{n}\cdot(\underline{p}_1 - \underline{p}_2) = -3$

$\rightarrow$ $\boxed{d = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1.34}$

Síkok

1. a) $\underline{n} = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = (10, -5, -4)$ P pont a síkon: $(1,1,1)$

az egyenlet: $\boxed{(x_1-1)\cdot 10 + (x_2-1)\cdot(-5) + (x_3-1)(-4) = 0}$

b) $\underline{v}_1 = \overrightarrow{PQ} = (7,1,-3)$ $\underline{v}_2 = \overrightarrow{PR} = (4,3,-2)$ $\underline{n} = \underline{v}_1 \times \underline{v}_2 = (7,2,17)$ Pont: pl. P

2. a) $2\cdot 3 + 4 - 17\cdot 5 = 10 - 85 \neq 4$

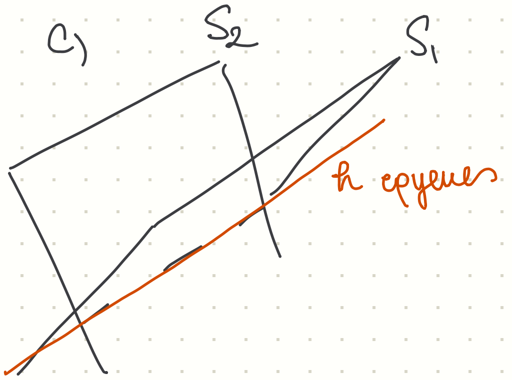
$\boxed{\text{nincs}}$

b) $(x_1, x_2, x_3) \in f$, ha $\exists t$, hogy az
$x_1 = 8+t$
$x_2 = 8+t$
$x_3 = 5$
kielégíti a sík $x_1 + x_2 = 9$ egyenletét, vagyis

$8+t+8+t = 9 \Downarrow 16+2t = 9 \Rightarrow t = \frac{9-16}{2} = -\frac{7}{2}$

$\boxed{\text{igen, a } \left(8-\tfrac{7}{2}, 8-\tfrac{7}{2}, 5\right) = \left(\tfrac{9}{2}, \tfrac{9}{2}, 5\right) \text{ pontban.}}$

c)

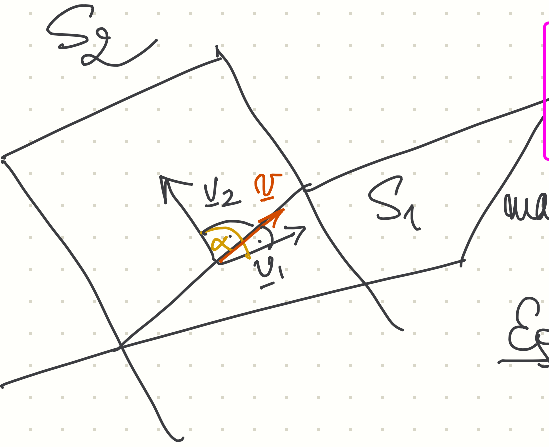


a metszet egyenest nev. h-nak, jelöljük $\underline{v}$-vel h irányvektorát.
Mivel $\underline{v} \in S_1 \to \underline{v} \perp \underline{n}_1$ (S_1 normálvektora)
$\underline{v} \in S_2 \to \underline{v} \perp \underline{n}_2$ (S_2 normálvektora)
$\Rightarrow \underline{n}_1 \times \underline{n}_2$ jó lesz normálvektornak.
$= (-17, 17, -1)$

$\Rightarrow$ egy pont $P(x_1, x_2, x_3)$ az egyenesen pedig lehet bármi, ami kielégíti S_1 és S_2 egyenletét pl. $x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = \frac{6}{17}$

d) S_1 és S_2 hajlásszöge?

gyors válasz: S_1 normálvektora ($\underline{n}_1 = (1,1,0)$) és S_2 normálvektora ($\underline{n}_2 = (2,1,-17)$) által bezárt szög:



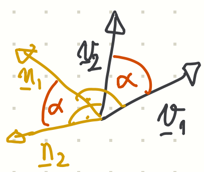
$$\boxed{\measuredangle(\underline{n}_1, \underline{n}_2) \quad \arccos\left(\frac{\underline{n}_1\cdot\underline{n}_2}{|\underline{n}_1||\underline{n}_2|}\right) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{590}}\right) \approx 82,89^\circ}$$

magyarázat:

Egyrészt: $\underline{v}_1 \perp \underline{v} \in S_1 \cap S_2$
$\underline{v}_1 \perp \underline{v} \in S_1 \cap S_2$
$\Rightarrow$ $\underline{v}_1$ és $\underline{v}_2$ abban a síkban van (aminek $\underline{v}$ a normálvektora) amiben $\underline{n}_1$ és $\underline{n}_2$ is van.

Másrészt: $\underline{v}_1 \in S_1 \Rightarrow \underline{v}_1 \perp \underline{n}_1$
$\underline{v}_2 \in S_2 \Rightarrow \underline{v}_2 \perp \underline{n}_2$

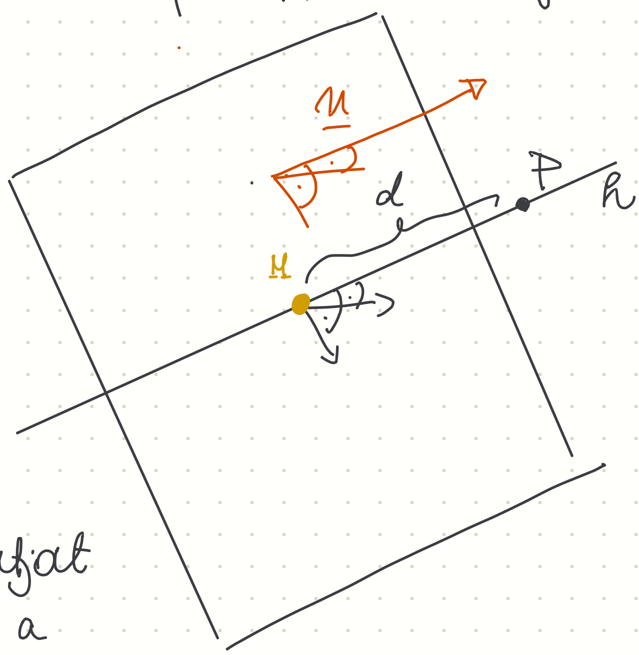
Tehát ami ilyesmi a helyzet:



e) a sík normálvektora a merőleges egyenes irányvektora.

$\underline{v} = (1,1,0)$,

$$\boxed{\begin{array}{ll} \underline{\text{Tehát}}: & x_1 = a + t \\ h: & x_2 = b + t \\ & x_3 = c \end{array}}$$



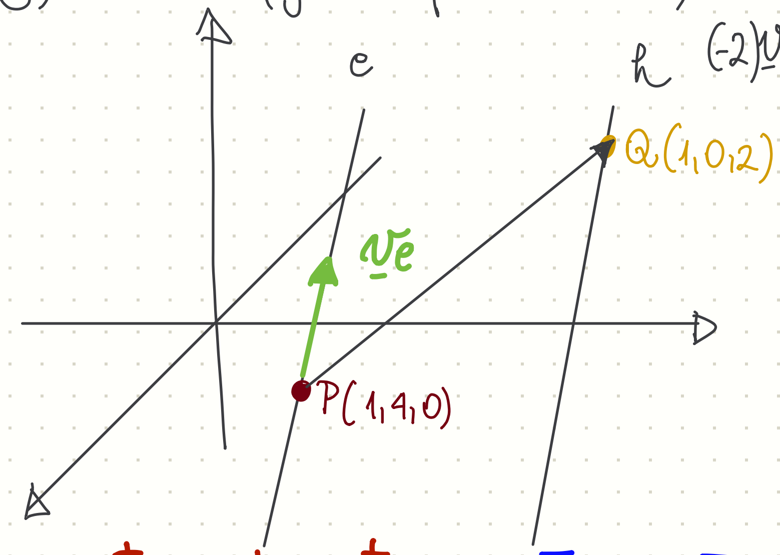
+ a távolsághoz számoljuk ki a h egyenes M metszéspontját a síkkal, majd számoljuk ki a $d = d(M,P) = |\overrightarrow{MP}|$ távolságot.

M: $a+b+2t = 9 \Rightarrow \boxed{t = \frac{9-a-b}{2}} \Rightarrow M = \left(a + \frac{9-a-b}{2}, b + \frac{9-a-b}{2}, c\right)$

$\overrightarrow{MP} = \left(\frac{9-a-b}{2}, \frac{9-a-b}{2}, 0\right)$ $|MP| = \sqrt{2 \cdot \left(\frac{9-a-b}{2}\right)^2} = \boxed{\sqrt{2}\left(\frac{9-a-b}{2}\right)}$

g) A két egyenes párhuzamos,

$(-2)\underline{v_e} = \underline{v_h} = (-2,4,-10)$



A sík normálvektorának megtalálásához jó, ha van 2 lin. ftlen vektor a síkból. $\underline{v_e}$ jó egynek, egy másikhoz pedig válasszuk a $\overrightarrow{PQ}$ vektort:

$(0,-4,2) = \overrightarrow{PQ} = \underline{v_2}$. Innen

$\underline{n} = \underline{v_e} \times \underline{v_2}$ ...

	+	+	+	−	−
	$\underline{i}$	$\underline{j}$	$\underline{k}$	$\underline{i}$	$\underline{j}$
$\underline{v_e}$	1	−2	5	1	−2
$\overrightarrow{PQ}$	0	−4	2	0	−4

$\underline{i}(-4+20) + \underline{j}(0-2) + \underline{k}(-4-0)$

$\shortparallel$

$(-16, -2, -4)$

⇒ A sík egy lehetséges egyenlete:

$$\boxed{(x_1 - 1)(-16) + (x_2 - 4)(-2) + (x_3 - 0) \cdot (-4) = 0}$$